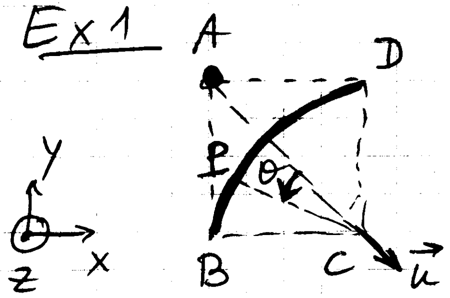
L2-MPI | Corrigé du partiel d'Electromagnétisme - Nov 2013 |

Ex 1



a) les plans $(C, \vec{AC}, \vec{u_z})$ et $(C, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ sont des plans de symétrie passant par C $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(C) = E(C)\,\vec{u}}$ avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$

b) • D'après le th. de superposition :

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_q(C) + \vec{E}_\lambda(C)$$

avec $\vec{E}_q(C) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{q}{\|\vec{AC}\|^2}\vec{u} = \dfrac{q}{8\pi\varepsilon a^2}\vec{u}$ car $\|\vec{AC}\| = \sqrt{2}a$

et $\vec{E}_\lambda(C) = E_\lambda(C)\,\vec{u}$ d'après a)

avec $E_\lambda(C) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{P\in \text{arc } \widehat{BD}} \lambda\, dl\, \frac{\vec{PC}\cdot\vec{u}}{\|\vec{PC}\|^3}$

P repéré par l'angle θ

$dl = a\,d\theta$ et $\|\vec{PC}\| = a$ et $\vec{PC}\cdot\vec{u} = \|\vec{PC}\|\cos\theta = a\cos\theta$

donc $E_\lambda(C) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a^2}{a^3}\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$

$$= \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{2a^2} + \frac{\lambda\sqrt{2}}{a}\right)\vec{u}}$$

• D'après le th de superposition

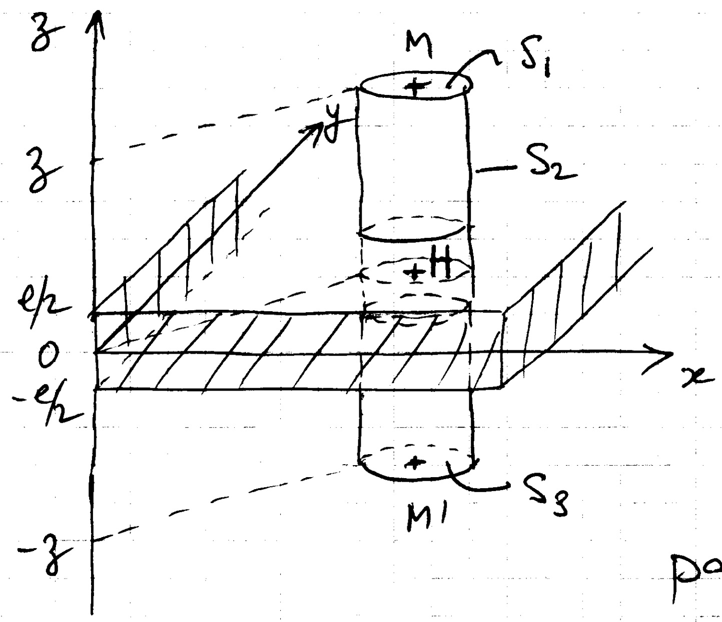
$$\phi(C) = \phi_q(C) + \phi_\lambda(C)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\|\vec{AC}\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{P\in\widehat{BD}} \frac{\lambda\, dl}{\|\vec{PC}\|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}a} + \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{\lambda\pi}{2}\right)}$$

Ex 2



a) • Symétrie plane
$\Rightarrow M(x,y,z)$ repéré par coord. cartésiennes

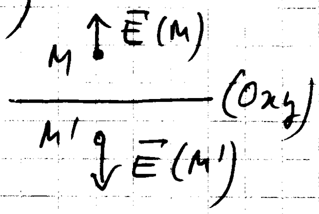
• tous les plans contenant (HM) sont des plans de symétrie passant par M $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u_z}$

• la distribution de charges est invariante par translation parallèlement au plan (Oxy)
$\Rightarrow E(x,y,z) = E(z)$

Donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\vec{u_z}}$

• le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution de charges donc si M' est le symétrique de M par rapport à ce plan
alors $\vec{E}(M')$ " " de $\vec{E}(M)$ " " " "

et comme $\vec{E}(M) // \vec{u_z} \Rightarrow \boxed{E(z) = -E(-z)}$



b) Appliquons le th de Gauss
sur cylindre S_2 d'axe HM, hauteur 2z, surface S, fermé par 2 bases S_1 et S_3 situées aux altitudes z et -z, avec $z \geq 0$

$$\oint_S \vec{E}(M)\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} E(z)\vec{u_z}\cdot dS\vec{u_z} + \iint_{S_2} E(z'')\vec{u_z}\cdot dS\vec{u_r} + \iint_{S_3} E(-z)\vec{u_z}\cdot(-dS\vec{u_z})$$

$$= E(z)S - E(-z)S = 2E(z)S \text{ d'après a)}$$

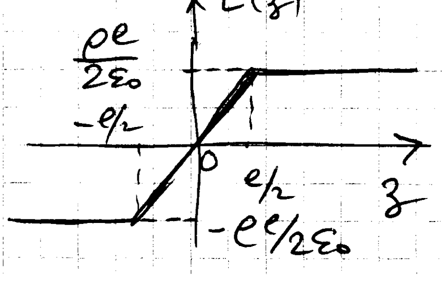
2 cas : $0 \leq z \leq e/2$ $\quad Q_{int} = \rho S 2z \Rightarrow 2E(z)S = \frac{\rho S 2z}{\varepsilon_0}$

soit $E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$

$z \geq e/2$ $\quad Q_{int} = \rho S e \Rightarrow E(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}$

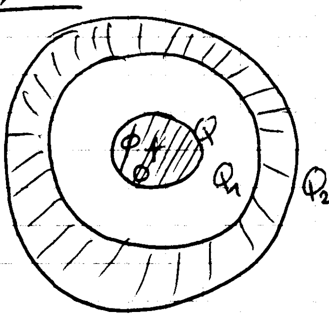
E(z) étant impaire, on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} z \leq -e/2 & \vec{E}(M) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon}\vec{u_z} \\ -e/2 \leq z \leq e/2 & \vec{E}(M) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\vec{u_z} \\ z \geq e/2 & \vec{E}(M) = \rho e/2\varepsilon_0\, \vec{u_z} \end{array}}$$



(E(z) bien continu partout)

Ex 3



a) • Conducteurs à l'équilibre ⇒ charges à la surface : Q, Q_1 et Q_2

• Symétrie sphérique ⇒ coord. sphériques.

• Tout plan contenant (OM) est un plan de symétrie passant par M ⇒ $\vec{E}(M) = E(r,\theta,\varphi)\,\vec{u_r}$

• Distribution de charges invariante par rotation autour de O ⇒ $E(r,\theta,\varphi) = E(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u_r}}$$

• Surface de Gauss : sphère $S(r)$, rayon r, centre O

$$\oiint_S \vec{E}(M)\cdot\vec{dS} = \iint_{S(r)} E(r)\vec{u_r}\cdot dS\,\vec{u_r} = E(r)\oiint_{S(r)} dS = E(r)\,4\pi r^2$$

• $R_1 < r < R_2$ $\quad Q_{int} = Q + Q_1$

$E(r) = 0$ car à l'intérieur conducteur (C_2)

⇒ d'après le th de Gauss : $Q + Q_1 = 0$ soit $\boxed{Q_1 = -Q}$

[normal, les 2 surfaces internes sont en influence totale]

• $r > R_2$ $\quad Q_{int} = Q + Q_1 + Q_2 = Q_2$

⇒ d'après th de Gauss : $E(r) = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}$

or $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,\phi(M) \Leftrightarrow d\phi = -\vec{E}(M)\cdot\vec{dOM} = -E(r)\vec{u_r}\cdot\vec{dOM} = -E(r)dr$

$\Rightarrow d\phi = -\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}dr \Rightarrow \phi(r) = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon r} + \underbrace{cste}_{=0}$ car $\phi(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

Donc $\phi(r) = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Or $\phi(r)$ est continu partout ⇒ $\phi(R_2) = \phi_{(C_2)} = 0$ car (C_2) est à la terre.

$$\Rightarrow \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_2} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_2 = 0}$$

• $\phi_{(C_1)} = \phi = cste = \phi(O) = \displaystyle\iint_S \frac{\sigma\,dS}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{PO}\|} + \iint_{S_1}\frac{\sigma_1\,dS}{4\pi\varepsilon\|\vec{P_1O}\|} + \iint_{S_2}\frac{\sigma_2\,dS}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{P_2O}\|}$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 4\pi\varepsilon\,\frac{RR_1}{R_1 - R}\,\phi}$$

[Rq : le calcul par les intégrales de Coulomb suppose l'origine des ϕ à l'∞ qui est bien le choix fait dans l'énoncé]

On aurait pu calculer ϕ par Gauss avec $R < r < R_1$:

$Q_{int} = Q \Rightarrow E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \displaystyle\int_R^{R_1} d\phi = \phi(R_1) - \phi(R) = 0 - \phi = \int_R^{R_1} \frac{-Q\,dr}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)$

$\Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR_1}{R_1-R}\phi$]

b) $r<R$ $\quad \boxed{E(r)=0 \\ \phi(r)=\phi}$ (intérieur conducteur (C_1))

$R<r<R_1$ $\quad Q_{int}=Q \Rightarrow$ d'après Gauss $\boxed{E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{RR_1}{R_1-R}\frac{\phi}{r^2}}$

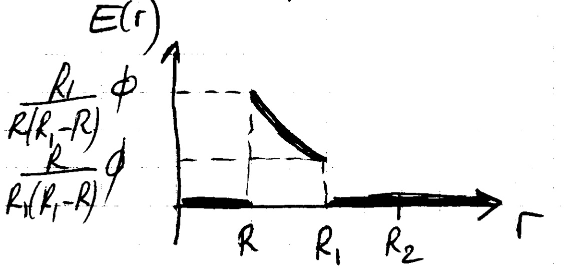
$\Rightarrow d\phi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

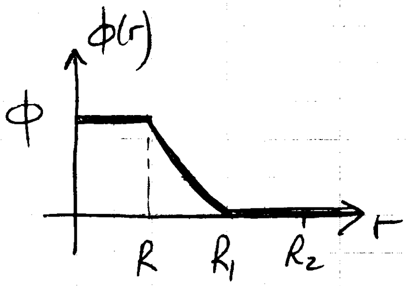
C tq. $\phi(R_1)=0 \Rightarrow C = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

$\Rightarrow \boxed{\phi(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{RR_1}{R_1-R}\phi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)}$

$R_1<r<R_2$ $\quad \boxed{E(r)=0 \\ \phi(r)=0}$ (à l'intérieur de (C_2)) ((C_2) à la terre)

$r>R_2$ $\quad \boxed{E(r)=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=0 \\ \phi(r)=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=0}$ d'après a)





$E(r)$ est bien discontinu à la traversée de 2 surfaces chargées S et S_1

$\phi(r)$ est bien continu partout. Sa dérivée $\frac{d\phi}{dr} = -E(r)$ par contre est discontinue à la traversée des surfaces chargées S et S_1